Die Uniekheid van Getal en Ruimte as Grondslag vir Besinning oor die Elementêre Grondbegrippe in die Wiskunde[1]

Dirk C.J. Wessels

The question: What is mathematics?, can only be answered when the aspects of number and space are analysed in their uniqueness and mutual interrelationship. The supporters of the Philosophy of the Cosmonomic Idea have made a huge contribution to a detailed analysis of the meaning of cosmic time as well as a responsible recognition of the time intuition of the human being. This has enabled them to give a sound explanation of the meaning of the potential and complete infinite and to stear away from arithmeticism in the views of what number is. The fundamental difference beween discrete quantity and continuous extendedness is stressed – the latter defines the spatial aspect. An explication of the subject-object relationship shed some light on the relationship between points and lines, the meaning of time-order for the spatial aspect and the differences between analytical, Euclidean and non-Euclidean geometries. The way is now open to investigate the nature of analogies and metaphors in our attempt to identify and analyse the elementary basic concepts in mathematics.

1. Inleiding

As daar oor die grondbegrippe van die wetenskap besin word, is dit gebiedend noodsaaklik dat daar uitgegaan moet word van 'n duidelike strukturele perspektief op die aard van en samehang tussen wetenskap, vakwetenskap en natuurwetenskap. Hierdie struktuurontleding vorm dan die breë agtergrond waarteen die vak wiskunde na sy eie aard en struktuur bestudeer moet word.

---

1 Hierdie artikel is gebaseer op hoofstuk 4 (pp 180-213) van my D.Ed.-proefskrif: Wessels, D.C.J., 1989, 'n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool. Ongepubliseerde D.Ed.-proefskrif. Pretoria: Unisa.

Kennis aangaande die werklikheid vereis ’n idee van die struktuur van die werklikheid. Vir die Reformatories-georiënteerde wetenskaplike is daar vier dimensies in hierdie struktuur, naamlik die dimensies van die entiteite en modaliteite, die dimensie van die kosmiese tyd en die religieuse dimensie. Die wetmatige idee wat hieruit voortspruit, noop die Christendenker om die wetmatige struktuur van die kosmos na sy uniekheid en samehang te erken. Sy fundamentele uitgangspunt is dat die ganse kosmos onderworpe bly aan die skeppingswet van God en dat hierdie wet die grens is tussen God en kosmos. Hierdie grondidee word egter gedra deur die Christelike religieuse grondmotief van skepping, sondeval en verlossing wat gegrond is in die Bybel, wat die diepste lewensentrum van die mens, sy hart waaruit die oorspronge van die lewe is, beheers. Die denke van die mens is nie onaantasbaar en outonoom nie, want dis die mens wat uit sy hart met sy logiese vermoë dink, en so wetenskap tot stand bring. Wetenskap as deel van die mens se kultuurarbeid op aarde, dra dus dieselfde religieuse karakter as die motief wat daardie mens se hart beheers.

Die geskape werklikheid se modale dimensie word onderskei as bestaande uit 15 verskillende aspekte wat elk ’n sinkern met ’n eie wetsy of normsy en ’n feitlike of subjeksy het. Elkeen van hierdie aspekte se sinkerne is uniek, onderling onherleibaar en ondefinieerbaar. Daar word ook deur middel van die regulatiewe idees van soewereiniteit in eie kring en universaliteit in eie kring seker gemaak dat die werklikheid se verskeidenheid in samehang verklaar word en dat daar geen reduksionistiese herleiding na ’n enkele grondnoemer plaasvind nie. Die gebruik van analogieë en metafore in die beskrywing van werklikheid is tiperend van kennisvorming. Analogieë bestaan tussen werklikheidsaspekte – ’n bestaande aspek se sinkern word deur analogieë omskryf en metafore word gebruik om entiteitsanalogieë aan te dui. Metafore, as taalvorm, word deur die mens ingespan om iets nuuts van die werklikheid bloot te lê. Daar kan verwag word dat analogieë en metafore verder in hierdie besinning oor die grondbegrippe van die wiskunde ’n baie belangrike rol gaan speel.

Die opgaaf van hierdie artikel is dus om hierdie analise uit te voer en die bevindinge so uit te stal dat dit dan moontlik is om daarna die elementêre grondbegrippe te identifiseer. Hierdie artikel sal die analise uitvoer. ’n Daaropvolgende artikel sal die elementêre grondbegrippe identifiseer en blootlê.[2] Hierdie navorsing is gedoen in navolging van die duidelike spore

2 Kyk die *Tydskrif vir Christelike Wetenskap*, 2006, 42(4) pp 173-207.

wat DFM Strauss in hierdie veld gelê het. Hy het as die mees-prominente kenner van die Reformatoriese Wysbegeerte die lewenstaak opgeneem om tot in fyn besonderhede hierdie vakfilosofiese uniekhede en samehange van die konstitutiewe elemente van die wiskunde te ontrafel en weer sinvol as ’n geheel aan mekaar te sit. Sonder sy ‘voorloop’ sou hierdie artikel nooit die lig kon sien nie.

2. Alles is uniek en alles hang met alles saam

Wanneer daar na die modale dimensie van die skepping gekyk word, val dit op dat daar enkele belangrike dinge aan die hand van die beginsels van soewereiniteit in eie kring en universaliteit in eie kring uitstaan. Dit is dat die sinkern van elke aspek van die werklikheid uniek, onherleibaar en ondefinieerbaar is.

Elke aspek se sinkern is uniek en onherleibaar. Strauss (1978: 112) verantwoord dit dat God elke aspek en skepsel na sy eie aard geskape het. Hy vervolg:

> In onderskeiding van die almag van God is die besondere struktuur van elke aspek begrens tot die sfeer wat deur die skeppingsgegewe eie aard daarvan bepaal en gestempel word. Hierdie begrensing word bepaal deur die modale wette wat vir elke aspek gegee is.

Strauss (1969: 84) neem die juridiese aspek as voorbeeld wanneer hy sê:

> Al kan ons nie egter antwoord op die vraag wat reg (vergelding) modaal besien is, sonder om in ’n toutologie of ’n onsinnigheid te verval nie, verhoed dit nogtans nie die wetenskaplike om gebruik te maak van ’n regsbegrip (wat op die ondefinieerbare eie aard van die regsaspek berus) nie. Die vraag wat die aard van die sin-kern van die regsaspek is, kan wel beantwoord word wanneer die samehang met ander aspekte retrosipasies en antesipasies in aanmerking geneem word, maar die sin-kernself bly ondefinieerbaar! Aangesien ook al die ander aspekte waarheen die regsaspek vooruit- en terugwys ’n ondefinieerbare sin-kern besit, bring dit ons geensins nader tot ’n definiëring van die sin-kern van die reg nie.

Dit was veral Dooyeweerd (vgl. Stafleu, 1980: 14 e.v.) wat deur die Reformatoriese wysbegeerte daarin geslaag het om aan te toon dat die onderskeie modale aspekte onderling onherleibaar is. Dit is bekend uit die werke van Dooyeweerd, Strauss en Stafleu dat hulle baie skerp waarsku teen die geneigdhede binne die Westerse denktradisie om die onherleibare sinkerne reduksionisties na mekaar te herlei. Dis ’n geneigdheid “... to reduce the irreducibles”.

In die bespreking van sy vierde doelstelling van wetenskapsbeoefening en wel die rekonstruksie en sintese van tipiese wette, skryf Stafleu (1980: 13, 14) dat hierdie uniekheid en onherleibaarheid geensins op ’n verabsolutering van enige aspek dui nie. Stafleu verduidelik hier dat elke aspek ’n universele karakter dra “... but we avoid the pitfall of absolutizing them”. Die waarborg hiervan is volgens hom juis geleë in die feit dat “... although the modal aspects are mutually irreducible, they are neither unconnected nor independent”.

Die verabsolutering van ’n bepaalde aspek kanselleer teoreties die modale universaliteit in eie kring (u.i.e.k.) van daardie aspek, omdat die soewereiniteit in eie kring (s.i.e.k.) van elke aspek die universaliteit daarvan relativeer en begrens binne die eie sfeer daarvan. Die beginsel van universaliteit in eie kring het dus alleen sin omdat elke modale aspek in sy betreklikheid selfgenoegsaamheid ontbeer. Om hierdie rede staan die beginsel van u.i.e.k. net so skerp soos die beginsel van s.i.e.k. teenoor elke verabsolutering. Elke aspek is ook ondefinieerbaar. Strauss (1988a: 120) verklaar: “Juis omdat die soewereiniteit in eie kring van elke aspek oorspronklik tot uitdrukking kom in die sin-kern daarvan, is die sin-kern as sodanig nie definieerbaar nie”. Duidelike voorbeelde bestaan haas in elke vakwetenskap om te bevestig dat elke (reduksionistiese) herleidingspoging, of elke poging om ’n sinkern nader te omskryf (definieer) vasloop in teenstrydighede en teenwetlikhede – dus antinomieë. Voorbeelde hiervan is die paradokse van Galilei en Bolzano, asook van Bertrand Russell.

Wiskunde is die vakwetenskap wat met die eerste twee natuuraspekte, naamlik getal en ruimte, te doen het en daarom gaan die elementêre grondbegrippe van die wiskunde eerste identifiseer en ontleed word.

3. Wiskunde

Op die vraag “Wat is wiskunde?” word vandag baie verskillende antwoorde gegee. Enkele weergawes is die volgende:

- “ ... the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true” (Russell, 1956: 1577).
- “... the science which draws necessary conclusions” (Peirce, in Bell, 1966: 19).
- “ ... the science of selfevident things” (Kleine, in Bell: 19, 20).
- “... (Pure mathematics) is the class of all propositions of the form p implies q, where p and q are propositions...” (Russell, 1937: 3).

- “mathematics is the discipline which ultimately studies (the formal systems) of algebra and topology” (Bourbaki, in Strauss, 1986: 5).

’n Definisie van wiskunde uit formalistiese hoek word deur Phenix (Volmink, 1983: 16) gegee. Hierdie definisie open die moontlikhede na die struktuur van moderne wiskunde:

> Mathematics is a discipline in which formal symbolic systems are constructed by positing certain undefined terms (elements, sets, rules of combination), adopting certain postulates (concerning both the undefined and the defined terms), and then, using the principles of logic, drawing necessary deductive inferences, resulting in an aggregate of propositions called ‘theorems’. The propositions of mathematics are formal and abstract in that they do not necessarily refer to the structure of the actual world but comprise a series of purely abstract formalisms all having in common the one rule of logical consistency.

Davis en Hersh (1980: 18) se beeld van die wiskunde is ’n boom:

> Mathematics is often depicted as a mighty tree with its roots, trunk, branches, and twigs labelled according to certain subdiciplines. It is a tree that grows in time.

Hierdie boom word verder deur Davis en Hersh (p.18) beskryf, met verwysing na John von Neumann se weergawe van die verwantskappe tussen afdelings in die wiskunde: Algebra is gebaseer op rekenkunde; meetkunde op rekenkunde en algebra; topologie is ’n sytak van meetkunde, versamelingsleer en algebra; differensiaalvergelykings bou op calculus, topologie en algebra (veral lineêre algebra); diskrete wiskunde spruit voort uit die algebra se getalleleer en gee via die Boolean-algebra en simboliese logika aanleiding tot rekenaarwiskunde; en waarskynlikheidsleer sorg op sy beurt vir statistiek. Trigonometriese verhoudings en reekse van eksponensiële groei is deur middel van periodisiteit onderling verbind, e^{x} as die geheimsinnige transendentale eksponensiële getal (2,718281828459....) verbind die afleiding van drie reeksuitbreidings deur middel van Euler se vergelyking: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, waar $i=\sqrt{-1}$ waar die vergelyking uitwerk op $e^{pi} + 1 = 0$.

Davis en Hersh (1980: 29 - 30) toon in ’n bylaag (B) aan dat die *Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik* van 1868 twaalf onder-afdelings met 38 sub-kategorieë van die wiskunde aangedui het. Die twaalf afdelings waarna verwys word, is –

- die geskiedenis en filosofie van wiskunde
- algebra
- getalleteorie
- waarskynlikheid
- reekse
- differensiële en integrale calculus
- teorie van funksies
- analitiese meetkunde
- sintetiese meetkunde
- meganika
- wiskundige fisika
- geodesie en astronomie.

In 1979 het die Mathematical Reviews in *The Classification of Mathematics* sowat 3400 sub-kategorieë onder 11 nuwe afdelings van die wiskunde aangedui. So, byvoorbeeld, het die afdelings van calculus en teorie van funksies hierbo een afdeling geword, terwyl klassieke termodinamika, kwantum meganika, geofisika en astronomie saamgevoeg is. Meganika van deeltjies, sisteme en soliede liggame, klank, optika en elektromagnetiese teorie het een afdeling geword. 'n Nuwe groep wat ekonomie, operasionele navorsing, programmering, speletjies, biologie, gedragswetenskappe, sisteme, kontrole, inligting en kommunikasie, stroombane en automata uitmaak, het tot stand gekom. Een enkele afdeling het baie vergroot en is uitgebou deur talle verwante afdelings. Hierdie voorbeelde was bloot illustratief van die omvang en uitbreiding van die vak wiskunde. Die doel van die studie is egter nie om die vakwetenskaplike uitbreiding en omvang uit te wys nie maar om vanuit vakfilosofiese hoek die grondbegrippe na te speur en om oor die invloed van die grondbegrippe op die onderrig van wiskunde vakdidakties te besin. Wiskunde is 'n baie snel-groeiende vakwetenskap en word daagliks steeds uitgebou. Wiskunde se toepassingsmoontlikhede dek elke lewensterrein en dit groei gedurig. Na die oorheersing van die wiskundige wêreld deur die formalisme, het die nuttigheids- en toepassingswaarde van wiskunde 'n baie groot stoot vorentoe gekry (vgl. Davis & Hersh, 1980: 344).

Uit bogenoemde definisies en omskrywinge kom nog te min van die essentialia van die vak wiskunde tot sy reg. In sommige wiskunde-kringe is daar egter 'n besef dat die studieterrein van wiskunde dié van getal en ruimte is. Die uniekheid, onherleibaarheid en ondefinieerbaarheid van die twee aspekte word nog te dikwels geïgnoreer. Die besef van die twee aspekte is egter daar, want by ET Bell (1966: 12) wat 'n leidende outeur in die geskiedenis en filosofie van die wiskunde is, kry ons die volgende uitspraak :

> ... from the earliest times two opposing tendencies, sometimes helping one another, have governed the whole involved development of mathematics. Roughly these are the discrete and the continuous.

Hierdie gedagterigting word ook gesteun deur Davis en Hersh (1980: 6) wanneer hulle wiskunde omskryf: "... mathematics is the science of quantity and space". Dit is nodig om op 'n filosofies-gerigte vraag ook 'n antwoord van kosmiese draagwydte te gee. Daarom sal volstaan word met die volgende omskrywing:

> Wiskunde is identifiserende en onderskeidende logiese objektivering van diskrete kwantiteit (getal) en kontinue uitgebreidheid (ruimte) in hul uniekheid en onderlinge samehang (Wessels, 1985: 3).

In ooreenstemming met hierdie definisie van die wiskunde moet daar dus na die getals- en ruimte-aspekte in hul uniekheid en onderlinge samehang gekyk word.

3.1 Getal: Enkele konstitutiewe gesigspunte

3.1.1 Sinkern, wetsy en feitlike sy

Die sinkern van getal is onderskeie hoeveelheid of diskrete kwantiteit. Aan die wetsy van die getalsaspek, word die aritmetiese orde van opeenvolging of suksessie aangetref en aan die feitlike sy die getalsubjekte as werklike getalle wat feitlike suksessie openbaar. Daar is dus 'n onverbreeklike band tussen die wet en die feit – tussen getalswette en bewerkingsreëls aan die een kant en die spesifieke getalsubjekte aan die ander kant.

Die belangrikheid van 'n perspektief hierop waar die modale universaliteit prominent lê, kom van Stafleu (1980: 32):

> The numerical modal aspect of discrete quantity, as a universal mode of being, presupposes that every created thing is a unity, and that there exists a multitude of such unities. The numerical modal aspect is universal since there is nothing in the creation which is not subjected to numerical order. This order can be described as the order of before and after, both in its original numerical meaning of more and less, and its analogical meaning of smaller and larger in magnitude.

Diskrete kwantiteit kan nie nader omskryf word nie – dan loop dit vas in sirkelredenasies (vgl. paragraaf 4.3). Dus onderskeie hoeveelhede of kwantiteite wat uit afsonderlike eenhede bestaan, dui alles maar op diskrete kwantiteit (Strauss, 1978: 13). Die eie aard van die getalsaspek word ook na vore gebring deur die begrip eenheid en menigvuldigheid of eenheid en veelheid (vgl. Strauss, 1978: 13 - 14; 1988a: 123 - 129).

3.1.2 Numeriese tydsorde

Hier kan ook gepraat word van die numeriese tydsorde van opeenvolging wat voorkom aan die wetsy van die getalsaspek. Verder gryp 'tyd' ook terug na die derde skeppingsdimensie van die werklikheid, nl. die dimensie van die kosmiese tyd. Die geskape werklikheid is 'n tydelike werklikheid, maar hierdie kosmiese tyd moet nie vereenselwig word met fisiese tyd nie, want kosmiese tyd lê universeel ten grondslag van alles wat bestaan. Popma (1965: 76) beskryf dit soos volg: "De tijd is een wet, hij komt op ons toe als creatuurlijke ordening, als ordinantie". Schoeman (1983: 5) verduidelik soos volg:

> Hierdie tydsdimensie dui ook daarop dat daar sprake is van 'n kosmiese tydsorde waarin die onderskeie werklikheidsaspekte mekaar (in onomkeerbare tydsorde) opvolg, sodat ons kan praat van kosmies-vroeëre en kosmies-latere aspekte.

Strauss (1978: 54) verklaar dat die tydsorde inderdaad behoort tot die tydsbesef (tydsintuïsie) van elke mens. Sonder hierdie aritmetiese tydsorde van opeenvolging verval een van die grondslae van die moderne beskawing, want tydsmeting en tydsberekening staan fundamenteel. Dit is egter so dat die ervaringsbesef en -intuïsie van die mens aan hom insig gee om die oorspronklike aritmetiese tydsorde van opeenvolging te verstaan. In die beginsel van (volledige) matematiese induksie is hierdie tydsorde baie prominent, naamlik dat as 'n bepaalde bewering vir 'n sekere getal 'n' geld en dit dan aangetoon word dat die bewering ook vir 'n+1' geld, dit dan gesê kan word dat die bewering dan ook in die algemeen geld.

Die aritmetiese tydsorde (van opeenvolging of suksessie) word die beste illustreer deur die eenvoudige ry van natuurlike getalle (0); 1; 2; 3; 4; 5; 6; ... Dit verteenwoordig ook die tydsbesef van die oerintuïsie van "een en nog een en nog een ..." by die mens. Dit kan ook oneindig of eindeloos in die letterlike sin van die woord voortgesit word.

Getalstyd kom aan die wetsy na vore in die aritmetiese orde van vroeër en later, voor en agter. Aan die feitlike sy van die getalsaspek verskyn dit as tydsduur, soos feitlike tydsverskil in posisie. Die gedagtes van stygende of dalende orde, van negatief na positief (van links na regs op die getallelyn) of omgekeerd, is hier van belang.

Die intuïsionistiese wiskunde met ’n onontslote tydsbesef aanvaar slegs die bestaan van die potensieel- of suksessief-oneindige (SO) en ontken die bestaan van die opeens-oneindige (OO). Hiermee trek hulle ’n hele streep deur byvoorbeeld die transfiniete getalleleer van Cantor wat ’n geweldige stuk wiskunde is en wat ’n kostelike hulpmiddel is om op denk-ekonomiese wyse met die reële getalle om te gaan. Daarmee saam is ’n hele deel van die aksiomaties-formalistiese standpunt van Cantor bevraagteken – dit alles omdat hulle ’n onontslote aritmetiese tydsorde aanhang.

3.1.3 Kardinaliteit en ordinaliteit

’n Belangrike vraag wat rondom kardinaliteit en ordinaliteit bestaan, is welke een van hierdie twee konsepte primêr tot die ander is. Strauss (1978: 13) beskryf hierdie vraag as ’n vraag binne die moderne wiskunde grondslae-ondersoek waarop verskillende antwoorde in die verlede gegee is. Die korrekte antwoord hierop is dat die besef van ordinaliteit (die vraag na die hoeveelste element) altyd ’n orde van aftelling veronderstel. Getalle wat so gebruik word om die orde-plek aan te dui, heet ordinale getalle (dit dui op die sus- of soveelste in ’n geordende ry). Indien daar egter gevra word na die aantal albasters byvoorbeeld in ’n sakkie, is die getal (hoeveelheid) van belang, ongeag die volgorde waarin hulle getel word of mag voorkom. Hier is die kardinaliteit van die albasters, of te wel hul kardinaalgetal, op die voorgrond (Strauss, 1978: 13). Dit is belangrik om daarop te let dat enige afparingsproses, al sou daar ook gedink word dat die kardinaliteit in die proses primêr is, altyd afhanklik bly van die orde van opeenvolging. Hiervolgens kan ’n mens een-vir-een afpaar sonder om te weet wat die hoeveelheid is wat afgepaar is, of wat die hoeveelste element op ’n bepaalde tydstip is. Afparing kan egter hoegenaamd nie plaasvind, sonder dat dit die aritmetiese orde van opeenvolging gehoorsaam nie.

Vir Herman Weyl (Strauss, 1986: 55) is daar geen onduidelikheid dat ordinaliteit die primêre idee van die twee is nie. Dit was Von Neuman (Strauss, 1986: 54) wat in 1925 binne die versamelingsleer eerste probeer het om kardinale getalle op die basis van ’n definisie van ordinale getalle in te voer. Fraenkel; Bar-Hillel; Levy en Van Dalen (1973: 80) het geen twyfel daaroor gehad dat kardinale getalle nie hanteer kan word sonder die implisiete of eksplisiete gebruik van orde nie. Volgens hom is daar –

> ... hardly a doubt that psychologically the ordered set is primary, owing to our experience with spatial order and temporal succession, and that the plain set is derived from abstraction.

Dit was egter net hier waar die probleem ontstaan het, omdat die "plain set" beskou was as die meer algemene idee gebaseer op 'lede of elemente wees' alleenlik. Die ander rede was dat wiskunde normaalweg beweeg van die algemene na die minder algemene (spesifieke) – dus deduktief, klink dit baie logies om te begin met "plain sets" en kardinale getalle vóórdat geordende versamelings en ordinale getalle ingevoer word. Die argument word voltooi deur die orde relasie by te voeg by die 'element van' en die ekwivalensie-relasie.

Kuratowski (in Strauss, 1986: 55) was die man wat gepoog het om die idee van die geordende getallepaar wat Fraenkel *et al.* op grond van die aksiomas van "extensionality" (uitgebreidheid) en afparing geformuleer het, op 'n ander wyse te herformuleer maar het in 'n sirkelredenasie beland. Fraenkel *et al*. (1973: 33) se formulering was: "The ordered pair (a,b) is an element which corresponds to a and b (taken in that order) such that (i) for all a, b, c, d if (a, b) = (c, d) then a = c and b = d". Kuratowski se omskrywing van die definisie was (a, b) = [(a); (a, b)]. Strauss (1986: 55) verklaar hierop dat dit 'n merkwaardige feit is dat hierdie omskrywing nie die term-orde in die Zermelo-Fraenkel versamelingsleer definieer nie, maar veronderstel. Die woorde "taken in that order" is hier van belang, maar blykbaar ook nie deurslaggewend nie omdat die orde van suksessie in elk geval teenwoordig is en geld. Die primitiewe sin van die orde van opeenvolging van die getalsaspek se wetsy is veronderstel in die aksiomas van uitgebreidheid en afparing.

3.1.4 Uitbreiding van die getalbegrip

Die uitbreiding van die getalbegrip is volledig afhanklik van die onlosmaaklike verwantskap en samehang tussen die wetsy en feitlike sy van die getalsaspek. Getalswette en bewerkingsreëls (aan die wetsy) word geformuleer wat dan ook geld vir bepaalde getalsubjekte (aan die feitlike sy).

Getallesisteem en getalleversameling

Die versameling natuurlike getalle word bepaal en begrens deur die numeriese tydsorde van opeenvolging wat in die bewerkings optelling en vermenigvuldiging 'n gespesifiseerde sin aan die wetsy van die getalsaspek besit. Die versameling natuurlike getalle is geslote vir die bewerkings optelling en vermenigvuldiging wat beteken dat as twee natuurlike getalle bymekaargetel of met mekaar vermenigvuldig word, die antwoord altyd weer 'n natuurlike getal is. By aftrekking is dit nie die geval nie want 3 - 7 = -4 wat nie 'n natuurlike getal is nie. Die implikasies van "... die onverbreeklike korrelasie tussen die bepalende en begrensende bewerking aan die wetsy en die bepaalde en begrensde subjekte aan die feitlike sy van die getalsaspek ..." (Strauss, 1978: 60, 61) is verreikend en die uitbreiding van die getalbegrip word beslis tans op primêre en sekondêre skoolvlak op 'n aritmetisistiese wyse uitgevoer (vgl. Wessels, 1982: 41 - 43; 142 - 143).

Die uitbreiding van die getalbegrip behoort sodanig hanteer te word dat die getalleversamelings as getallesisteme beskou word, sodat die verwantskap tussen wetsy en feitlike sy van die getalsaspek behoorlik verreken kan word. Die hele wyse van uitbreiding en onderlinge verwantskappe behoort dus só te lyk (vgl. Wessels, 1982: 42):

N_S: Sisteem van die Natuurlike getalle		Z_S : Sisteem van die Heelgetalle		Q_S : Sisteem van die Rasionale getalle	
Bewerkings wetsy	Getalsubjekte feitelike sy	Bewerkings wetsy	Getalsubjekte feitelike sy	Bewerkings wetsy	Getalsubjekte feitelike sy
Geslote vir + en x	Nv 1; 2; 3; 4; ...	Geslote vir +, -, en x	Zv ..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...	Geslote vir +, -, x en ÷)	Qv $\frac{a}{b}$; a, b ∈ Z; b ≠ 0

Fig.(i)

Dit is belangrik om daarop te let dat Ns nie 'n deelversameling van Zs of van Qs is nie, net so ook nie Zs van Qs nie. Wessels (1982: 42) se verklaring lui soos volg:

> Die rede is dat Zs ook geslote is vir die bewerking aftrekking en Ns nie daarvoor geslote is nie. Daar het by Zs 'n verdere bewerking aan die wetsy bygekom; gevolglik moes aan die feitlike sy korrelerende getalsubjekte verskyn. Dieselfde geld vir die bewerking deling by die sisteem rasionale getalle (Qs).

Indien die uitbreiding van die getalbegrip op die tradisionele manier gedoen word waar die getallestelsels net as versamelings van elemente gesien word en nie as sisteme nie, het ons te doen met 'n eg aritmetisistiese wyse van hantering omdat die noue verband tussen wetsy en feitlike sy binne 'n bepaalde aspek deurgesny word en die feitlike sy daarvan verhef word bo die samehang wetsy/feitlike sy.

Hierdie aritmetisistiese interpretasie kan geplaas word binne wat Holton (in Stafleu, 1980: 26) sou noem "the persistence of themes" want die konsekwensie van hierdie interpretasie loop uit op die waninterpretasie van die verhouding tussen kontinuïteit en diskontinuïteit. Die aritmetisisme beteken ook dat die getalsaspek met sy afgeslote afsonderlikheid gebruik word om die ruimte-aspek met sy kontinue uitgebreidheid to definieer. Vergelyk hiervoor die uiteensetting van Wessels (1982: 57 - 99) waarin die aritmetisistiese grondtrekke van die drie belangrikste denkskole in die wiskunde, naamlik die logisisme, die formalisme en die intuïsionisme aangedui word.

Ontsluiting en sin in die getalsaspek

Stafleu (1980: 25) verklaar dat enige verandering in ’n paradigma, ’n verandering in sin (betekenis, ‘meaning’) tot gevolg het. Sin en betekenis word bepaal deur die verwantskap tussen wet en subjek, want elke geskape ding wys in afhankliheid heen na Christus as Herskeppings-middelaar, omdat die skeppingsgegewene ondergeskik is aan die allesdekkende wet van God. Hiervolgens formuleer Dooyeweerd (1969, Vol. 1: 4) dan: “Meaning is the mode of being of all that is created”.

Dit is dan veral in die ontsluitingsproses van die bepaalde aspek dat die sin van die bepaalde aspek verdiep en gerelativeer word (Stafleu, 1980: 26), deurdat daar aanvanklik gekonsentreer word op retrosiperende analogieë van die modale aspekte of tipiese strukture wat ontdek is. Later met ’n paradigma-verskuiwing word gekonsentreer op nuwe retrosipasies of die ontdekking van antesiperende analogieë. Hierdie ontdekkings volg gewoonlik op ’n toenemende graad van teoretiese abstraksies en die gelyktydige ontsluiting van die nuwe tipiese strukture albei teoreties en tegnies van aard. Hierdie “persistent themes” kan ook vergelyk word met Thomas Kuhn se “scientific revolutions” (Stafleu, 1980: 26).

Hierdie probleem van kontinuïteit en diskontinuïteit is so oud soos die wiskunde self. Die valstrik in die opbou van die wiskunde was nog altyd by die fundering van die begrip kontinuïteit. Die neiging om ruimte (kontinuïteit) uit afsonderlikheid (getal) op te bou, verskyn dwarsdeur die geskiedenis van die wiskunde. Dit was dan ook Dantzig (1947: 96) wat gesê het dat die sistematiese –

> ... construction of the rational domain, were the first steps in a historical process called the aritmetization of mathematics. This movement, which began with Weierstrass in the sixties of the last century, had for its object the seperation of purely mathematical concepts, such as number and correspondence and aggregate, from intuitional ideas, which mathematics had acquired from long association with geometry and mechanics.

As Fraenkel-hulle skryf, dat –

> Bridging the gap between the domains of discreteness and of continuity, or between arithmetic and geometry, is a central, presumably even the central problem of the foundation of mathematics (Fraenkel *et al.*, 1973: 211),

dan is dit duidelik dat hierdie 'central problem' in der waarheid 'n paradigma of 'persistent theme' was wat die gang en ontwikkeling van die wiskunde vir baie eeue beheers het. Hierdie paradigma is in die grondslae van die wiskunde ingedra en het ook daar 'n baie stewige vastrapplek gekry.

Is 'n getalleversameling kontinu?

Die probleem is dat juis die antesipasies van die getalsaspek na die ruimte-aspek vertolk word asof dit 'n kontinue oorgang is vanaf getal na ruimte wat sou beteken dat getal ruimte konstitueer. Die kardinale vraag wat hier gevra word is of enige versameling getalle kontinu geag kan word? Beteken die digtheid van rasionale getalle op die getallelyn dat daardie rasionale getalle so naby mekaar lê dat hulle eintlik oorvleuel om so 'n kontinue lyn te vorm? Uit 'n ander hoek gesien kan ons ook vra wat gebeur met die getalle op die getallelyn as die versameling natuurlike getalle aangevul word met 0 en dan die negatiewe heelgetalle en dan met die rasionale getalle (wat nie reeds daar is nie). En as die irrasionale getalle bygevoeg word om die reëele getalle te vorm, waar die getalle dan nog nader aan mekaar op die lyn lê, word daar dan dieselfde kontinuïteit as vir 'n reguit lyn daargestel? Dedekind en veral Cantor was daarop ingestel om 'n versameling getalle 'perfek' te verklaar. 'n Versameling sou perfektheid bereik as die getalbegrip sodanig uitgebrei kon word dat dit dieselfde volkomenheid en kontinuïteit as 'n reguit lyn moet besit.

Dedekind (volgens Strauss, 1969: 183) het daarin geslaag om kontinuïteit in te dra in die oorspronklike getalsin deur die skepping van die irrasionale getalle. Vir hom is die ruimte nie noodwendig kontinu nie – hierin openbaar hy ook 'n sterk logisistiese trek. Hy verklaar:

> ... if we know for certain that space was discontinuous there would be nothing to prevent us, in case we so desired, from filling up its gaps, in thought, and thus making it continuous ...

Strauss (1969: 183) verduidelik hierop dat die punte wat langs hierdie weg die ruimtelike kontinuïteit konstitueer volkome verlogiseer is tot suiwere denkpunte, wat dan juis as punte opgehef is in die bewegingskontinuïteit van die denke. Op hierdie wyse word die modale singrense tussen die onderskeie werklikheidsaspekte logisisties uitgewis omdat daar geen funderende modale sin-analise van die onderlinge verhouding en sin-samehang tussen die getals- en ruimte-aspekte aan hierdie ondersoek ten grondslag lê nie.

Daar word implisiet slegs uitgegaan van die wysgerige vooronderstelling dat kontinuïteit reeds in die getalsaspek aangetref word – die irrasionale getalle herberg hierdie kontinuïteit en op hierdie wyse word die kontinuïteit in die getalbegrip ingedra, wanneer die getalbegrip uitgebrei word tot die irrasionale getalle.

Die irrasionale getal √2

Hierdie poging tot oorbrugging van die getals- na die ruimte-aspek het by die irrasionale getalle begin en sy hoogtepunt in die reële getalle gevind. Dit sou blykbaar nog makliker gewees het om die digtheid van die rasionale getalle volledig opgevul te kry deur die invoering van die reële getalle. Dan sou die diskrete verskil tussen die rasionale getalle oorbrug word. Strauss (1969:184) illustreer met 'n eenvoudige figuur wat getallelyne insluit, hoe daar te werk gegaan is om dit reg te kry. Hy maak egter nie van 'kontinue' punte gebruik nie en deur middel van die een-eenduidige ooreenkoms tussen die rasionale getalle en die punte op 'n reguit (getalle-) lyn, doen hy die benadering van die irrasionale getal.

0 1 √2 2
Al

1 √2 2
A2

1 √2 1,5
A3

1 1,25 √2 1,5
A4

0 1 √2 2

Fig. (ii) (Strauss, 1969: 184)

Die punt op die lyn van die benaderde waarde van √2, naamlik 1,414, word in die skets elke keer in 'n kleiner interval vervat, deur telkens die interval waarin √2 voorkom te halveer. Hierdie interval staan bekend as 'n geslote ingeslote interval en die punt wat met √2 ooreenstem behoort tot die interval $A_n = (a_n, a_n + 1/2^n)$.

Uit hierdie bewys dat daar geen rasionale getal bestaan waarvan die kwadraat gelyk is aan 2 nie, is dit duidelik dat, al word die intervalle steeds kleiner en kleiner gemaak, die waarde van √2 steeds binne so 'n interval geleë sal wees. Indien die aantal verdelings egter na oneindig strewe, wil dit voorkom asof die sg. irrasionale waarde van √2 die limiet-punt van die subverdelings vorm (Strauss, 1969: 184).

Een ander baie belangrike saak kom hier na vore en dit is die onvermoë van die menslike verstand om sekere dinge in begrip te vat. Dit is vir die mens onmoontlik om presies hierdie benaderde getalswaardes in ’n konvergerende reeks subintervalle ten volle te begryp – dit gaan die mens se begrip te bowe. Hy kan daar hoogstens ’n idee van vorm.

Die bekende stelling van Bolzano-Weierstrass, naamlik “elke oneindige begrensde puntversameling besit ten minste een limietpunt (verdigtingspunt)” word gefundeer met hierdie verduideliking van ’n geslote ingeslote interval. Bartle (1976: 76) formuleer hierdie stelling soos volg: “Every bounded infinite subset of RP has a cluster point”. Cantor het self die irrasionale getalle gedefinieer as die limietpunte van konvergerende reekse rasionale getalle. Die naam irrasionaal is dan ook duidelik paslik gekies om hierdie limiet van ’n konvergerende reeks wat die reële getalsfunksie nader en as’t ware ’n rasionele deursigtigheid ontbeer, te beskryf – dit lyk asof daar met iets gewerk word wat die denke nie kan omvat nie.

Strauss (1969: 185) wys daarop dat dit vandag nog die heersende tendens in die wiskunde is om aan ’n oneindige versameling reële getalle dieselfde kontinuïteit toe te ken as aan’n reguitlyn. Dit bly moontlik om ’n een-eenduidige ooreenkoms tussen die oneindige versameling reële getalle en elke punt van ’n reguit lyn tot stand te bring – dus is die neiging om die verdere sprong te maak as daar geen gefundeerde kosmologiese perspektief daarop is nie, baie groot.

3.1.5 Getalsbewerkings

Tesame met die uitbreiding van die getalbegrip vanaf die natuurlike getalle na die tel- en heelgetalle en dan na die rasionale, irrasionale en reële getalle, is ’n bespreking van die verskillende getalbewerkings van belang. Hierdie getalbewerkings kom aan die wetsy van die getalsaspek voor en illustreer ten volle die numeriese tydsorde van opeenvolging wat die wetsy ten grondslag lê. Dit is die bewerking, optelling, wat die bewerking aftrekking moontlik maak. Uit die gelykheidsrelasie, $a = b$, volg dit dat $a + x = b$ slegs as $x = 0$ en so is die getal ZERO ingevoer (die simbool 0 het die getalwaarde zero). As $a < b$ kan aftrekking nie meer binne die natuurlike getalle plaasvind nie. Die minussimbool (-), soos in -4 en -13 word nou gebruik om die negatiewe ‘natuurlike’ getalle te onderskei. Dit is egter nie negatiewe natuurlike getalle nie, want die natuurlike getalle is slegs positief en heel. Die getalle staan bekend as heelgetalle wat illustreer dat die getalsfunksie ’n omkeerbare kwantitatiewe sin in die plus- en minusrigtings het. Aftrekking is dus die omgekeerde bewerking van optelling, omdat vir elke positiewe heelgetal daar ’n negatiewe getal bestaan, waarvan die getalwaarde presies dieselfde is maar slegs die teken verskil. Op die getallelyn lê hierdie negatiewe heelgetalle net so ver links van nul (0) as wat die positiewe getalle regs van zero lê. Elke heelgetal, a, beskik oor ’n optellingsinvers, b, sodanig dat die som daarvan gelyk is aan nul – dus $a + b = 0$. So is +5 + (-5) = 0 en -8 + (+8) = 0.

Op hierdie wyse is optelling en vermenigvuldiging algemeen geldig in die natuurlike getalle, want die antwoord is elke keer ’n natuurlike getal as twee natuurlike getalle bymekaar getel of met mekaar vermenigvuldig word. Die versameling natuurlike getalle is gevolglik geslote, vir optelling en vermenigvuldiging. Die omkeerbaarheid van die aritmetiese tydsorde van opeenvolging word deur albei hierdie bewerkings ontbloot.

Die beginsel van isomorfie

Uit hierdie beredenering blyk dit duidelik dat die versamelings natuurlike en heelgetalle, twee verskillende versamelings is wat kragtens die betrokke geldende bewerkings vir elkeen nie eens deelversamelings van mekaar is nie. Die struktuur van die versameling natuurlike getalle (die kombinasie van bewerkings en ooreenkomstige elemente) verskil van die struktuur van die versameling heelgetalle. Die versameling van natuurlike getalle se elemente word egter isomorfies op die versameling heelgetalle afgebeeld volgens $a \rightarrow a' = +a$. Strauss (1969: 177) verklaar dat die versameling N en sy isomorfe beeld N’ in abstrakte sin (tegnies-wiskundig) dieselfde is.

Vermenigvuldiging het moontlik geword deur dit in te voer op die basis van herhaaldelike optelling en nadat vermenigvuldiging gevestig was, het die ander bewerking na vore gekom, naamlik deling. Deling en verdeling volgens heeltallige waardes het geen probleem gelewer solank die deelsom se antwoord heeltallig was nie, maar die breuke het ‘gevra’ na ’n getallestelsel waar deling algemeen geldig was. Dit, saam met die ontdekking van die irrasionale getalle deur die Pythagoreërs (met die eerste krisis in die wiskunde), het die versameling rasionale en irrasionale getalle gevestig. Die rasionale getalle is geslote vir die bewerking, deling, en worteltrekking kon ook nou plaasvind – $\sqrt{3}$ is ’n irrasionale getal. Die versameling rasionale getalle kon nou soos volg gedefinieer word:

$Q = \{\frac{a}{b} / \ a, b$ elemente is van Z$\}$.

Op dieselfde wyse as tussen die natuurlike en heelgetalle bestaan die isomorfe verband tussen die natuurlike of heelgetalle en die rasionale getalle. Die afbeelding:

$a \rightarrow a' = \frac{a}{b}$, waar b = 1, is waar die versameling heelgetalle isomorf afgebeeld word op 'n deelversameling van die versameling rasionale getalle. Die skryfwyse lyk dan so as die natuurlike getalle deur middel van die heelgetalle op die rasionale getalle afbeeld (vgl. Strauss, 1969: 177):

$Q^{11} = \{+\frac{1}{1};+\frac{2}{1};+\frac{3}{1};...........\}$

Die bewerking deling 'oorskry' die sin van getal

Die bewerking, deling, is die omgekeerde bewerking van vermenigvuldiging. Nou het elke getal 'n vermenigvuldigingsinvers wat die omgekeerde van daardie getal is. Om nou met 8 te deel is dieselfde as om met een-agtste te vermenigvuldig. Of om met 'n half te deel is dieselfde as om met 2 te vermenigvuldig. Een belangrike implikasie wat hier na vore kom by die bewerking deling, is die feit dat deling (en verdeling) iets van die oorspronklike getalsin 'oorskry' omdat daarin die idee van 'n geheel met sy dele veronderstel word.

Bogenoemde opmerking aangaande die 'geheel met sy dele' plaas die eerste krisis in die wiskunde in die destydse Pythagoreise skool in die sentrum. Die Pythagoreërs het van die grondstelling uitgegaan dat: "alles is getal" (vgl. Strauss 1988b:3). Kline (1980: 12) stel dit as –

"Number was the first principle in their explanation of nature" en "Number was the matter and form of- the universe" en verder volgens Philolaus, 'n vyfde-eeuse Pythagoreër "Were it not for number and its nature, nothing that exists would be clear to anybody either in itself or in its relation to other things".

Hierdie aritmetisistiese grondtrekke het aangesluit by die ou Griekse opvatting dat ook alle lynstukke in die verhouding van heelgetalle tot mekaar staan, dat dit met ander woorde 'n gemeenskaplike maat (ratio, logos) besit en derhalwe kommensurabel is. Dit beteken dat die lengte van enige lynstuk deur 'n rasionale getal aangetoon kan word. Strauss (1969: 181, 182; 1977: 274 -277) en ook Van den Berg (1977: 329) verklaar albei dat die vormgewende en begrensde funksie van getal vir die Grieke ondergrawe is deur die ontdekking van die irrasionale getalle wat op inkommensurabiliteit dui, want daardeur het dit geblyk dat die vormmatig-begrensde skuinssy aritmeties gesien, 'n oneindige en dus onbegrensde reeks herberg. Wanneer 'n reghoekige driehoek waarvan die twee reghoeksye elkeen 1 eenheid is, geneem word, is die lengte van die skuinssy v2, maar v2 is onmeetbaar. Om hierdie konsekwensie te vermy, dat die *apeiron* (onbegrensde) die *peras* (begrensde) ophef, is alle algebraïese probleme vertaal in ruimtelike terme. Daar word dus nou oorbeweeg vanaf die aritmetisisme na die geometrisisme – ’n swaai wat aangedryf is deur die grondmotief van die Griekse denke, naamlik die motief van vorm en materie. Sentraal staan egter die spanning tussen die wording (byvoorbeeld jaargetye) en die onderliggende strewe na konstansie (vgl. Strauss, 1988b: 3).

Hierdie neiging tot geometrisering het die ontwikkeling van die wiskunde beheers tot in die sewentiende eeu, soveel so dat talle belangrike ontdekkings eers toe plaasgevind het. Verder het dit ook meegebring dat ’n effektiewe behandeling van die irrasionale getalle eers teen die negentiende eeu gerealiseer het.

3.2 Ruimte: enkele konstitutiewe elemente

3.2.1 Sinkern, wetsy en feitlike sy

Die ruimte-aspek met ’n aparte en eiesoortige sinkern is as ’n afsonderlike aspek onderskeibaar van die getalsaspek. Die ruimte-aspek wat op die getalsaspek volg, besit sekere struktuurelemente wat terugverwys na die getalsaspek. Die sinkern van die ruimte is dan ook kontinue uitgebreidheid en dui op ’n aaneenlopendheid of ’n onafheid, samehangendheid of gapingloosheid. Strauss (1978: 14) beskryf dit soos volg:

> Uitgebreidheid in ruimtelike sin vertoon derhalwe ’n gapingloos-aaneenlopende samehang wat prinsipieel verskil van elke vorm van diskreetheid in die sin van die getalsaspek.

Aan die wetsy van die ruimte-aspek is die orde van opeens to vinde. Stafleu (1980: 50) beskryf hierdie orde as “... co-existence, static simultaneity or equivalence”. Aan die feitlike sy verskyn die feitlike ruimtelike uitgebreidheid in 1, 2 of 3 dimensies. Feitlike afstandgegewens is ook hier ter sprake. Stafleu (1980: 32) stel dit soos volg:

> The spatial order of simultaneous coexistence (on the law side of the spatial modal aspect) makes possible the original spatial relation of relative position (on the subject side of the spatial modal aspect).

As ’n voorwerp van alles geabstraheer word, behalwe die ruimtelike en getalsaspekte, sal dit staties en ruimtelikuitgebreid wees. Uitgebreid beteken hier dat dit gekonnekteerd is en dat dit al sy dele het (Stafleu, 1980: 46).

3.2.2 Tydsorde in ruimte-aspek

Die tydsorde aan die wetsy van die ruimte-aspek is die van gelyktydigheid (“simultaneity”). Strauss (1986: 64) toon aan dat die geskiedenis van tydsmeting dit bevestig dat die drie modi van tyd onderskei kan word as suksessie (vroeër en later), gelyktydigheid (saam teenwoordig) en tydsduur (tydsverloop). Hierdie drie modii van tyd kom dan ook voor aan die wetsye van die eerste drie werklikheidsaspekte, naamlik getal, ruimte en die kinematiese. Tydsmeting het begin met die blote tel van dae, maande en jare. Dit is opgevolg met die bepaling van die posisie van die son (en sterre) waar verskillende entiteite wat saam teenwoordig is, gebruik is – vergelyk die sonhorlosie. Later met die ontwikkeling van die meganiese tegnologie is klokke gebou waar die herhalende beweging (harmoniese beweging) van ’n swaaiende pendulum gebruik is om tyd aan te dui (wat baie duidelik die kinematiese orde van konstansie veronderstel). Stafleu (1980: 60) wys verder daarop dat slegs met behulp van die modernste tegnieke dit vandag selfs moontlik is om “atomic clocks” te bou wat dan volgens onomkeerbare fisiese prosesse tyd kan meet.

Daar bestaan dus tussen wiskunde en ’n tydsidee ’n noue verwantskap. Volgens Strauss (1986: 65) was dit hoofsaaklik die intuïsioniste wat eerste erkenning aan hierdie verwantskap gegee het. Hy vervolg:

> The ironical position of those opposed to the notion of time in mathematics (cf. Cantor, 1962 pp. 139 ff., 181, 478) is that they object in terms of one mode of time, namely simultaneity, identified with timelessness!

3.2.3 Die verskil tussen Euklidiese meetkunde en nie-Euklidiese meetkunde

Die doel van enige vorm van meetkunde-beoefening is om ruimtelike relasies te vind en te ondersoek (vgl. Stafleu, 1980: 26 e.v.). Omdat die Grieke soveel probleme gehad het met die irrasionale getalle, het hulle hul meer op die bestudering van ruimtelike relasies toegelê. Hulle het hiervolgens by ’n taamlik suiwer meetkunde-teorie oor die ruimte uitgekom, naamlik die Euklidiese meetkunde. Stafleu (1980: 47, 48) bespreek twee tipes ontsluiting van die ruimte-aspek om verder lig op hierdie saak te werp.

Die eerste ontsluiting van die ruimte-aspek was in die rigting van abstraksie: die invoer van punte, lyne, vlakke en geïdealiseerde ruimtelike subjekte en voorwerpe, tesame met die onherleibare wette en aksiomas wat vir hulle gegeld het. Hierdie abstraksie was baie belangrik vir die daaropvolgende studie van baie tipes ruimtelike strukture, soos driehoeke, poligone en die gewone vaste liggame.

Die volgende ontsluiting van die ruimte-aspek was die retrosipasie, toe Descartes die analitiese meetkunde ontdek het. Dit is later gevolg deur die ontwikkeling van nie-Euklidiese meetkunde, die toepassing van groepeteorie op ruimtelike strukture, die bestudering van nie-standaard topologieë en projektiewe meetkunde (Hierdie projektiewe meetkunde word soos volg gedefinieer "Affine geometry – a kind of geometry in which a figure is projected by parallel rays to a plane which can be tilted" – Bendick & Levin, 1976: 13).

Die Euklidiese meetkunde is 'n ontwerpte sisteem met 'n maat-begrip terwyl die nie-Euklidiese meetkunde nie 'n maat-begrip het nie.

3.2.4 Die rol van die ruimtelike subjek-objek relasie

Om behoorlik en sinvol tussen die sintetiese en analitiese meetkunde te onderskei, moet van die ruimtelike subjek-objek relasie gebruik gemaak word. Strauss (1969: 154) stel dit dat die analitiese meetkunde sy gesigshoek in die getalsaspek van die ruimte vind – dit is die retrosipasie na die getalsaspek. Dit is hierdie getalsanalogie wat die ruimtelike subjek-objekrelasie moontlik maak. Strauss vervolg deur te sê:

> Dan word dit duidelik dat die herhalende sin van die getal in die ruimte tot openbaring kom in die objeksy van die ruimtelike subjek-objek relasie en dat dit die blikpunt vorm waarop die analitiese meetkunde sy aandag konsentreer.

Die sintetiese meetkunde vind sy gesigshoek in die eie aard van die ruimte-aspek, nl. ruimtelike figure. Die sintetiese meetkunde word in die feitlike (subjek) sy van hierdie subjek-objek relasie aangetref terwyl die analitiese meetkunde in die objeksy sy tuiste vind (Strauss, 1969: 154). Hy beklemtoon verder dat die subjek-objek relasie steeds gesien moet word in onderworpenheid aan die wetsy van die ruimte-aspek en verder moet onthou word dat geen objeksfunksionering "an rich" bestaan nie, punte ontvang slegs sin-bepaaldheid in betrokkenheid op die subjeksy van die ruimte-aspek – dit onderstreep die feit dat die analitiese meetkunde nie herleibaar is tot blote getalbewerkings nie.

'n Twee-dimensionele subjek kan slegs twee-dimensionele dele hê. Op dieselfde wyse waarop groeperinge bymekaar getel kan word op voorwaarde dat daar nie ooreenstemmende dele is nie, kan ruimtelike subjekte se groottes bymekaar getel word as geen dele daarvan ooreenstem nie. Daar kan egter gemeenskaplike grense wees, want die grense is nie deel van die subjek nie. 'n Grens van 'n subjek het altyd minder dimensies as die subjek self.

Slegs een opmerking ten opsigte van 'n punt is van belang. 'n Punt is die eenvoudigste ruimtelike objek wat daar is en het geen dimensies nie – dit het egter ’n besonder belangrike betekenis. ’n Punt kan ’n grens wees vir ’n lyn wat een-dimensioneel is. Dit dien ook as grens van ’n driehoek by die bepaling van die twee-dimensionale figuur en word as ’t ware slegs ‘geplaas’ in die ruimte deur middel van (getalle-) koördinate vanweë die funderende sinverband tussen getal en ruimte. Die optelling van punte gee geen punt nie en die afstand tussen twee punte is ook geen punt nie, maar gee die grootte van ’n lyn aan. Die sin van die ruimte-aspek bly egter steeds ’n voorveronderstelde vir ieder plasing van ’n punt.

3.2.5 Verdeelbaarheid

Na die Pythagoreise krisis in verband met die bestaan van die irrasionale getalle se ‘uitgebreidheid’, was die Grieke van mening dat die menslike intuïsie van kontinuïteit meer basies is as die intuïsie van suksessie. Omdat dit moontlik is om die geheel van die kontinuïteit, naamlik die totaliteit, opeens waar to neem, was dit vir hulle voor die handliggend dat hierdie idee die eenvoudigste en mees basiese is. Die implikasies van die ruimtelike orde van opeens moet opnuut van nader bekyk word. ’n Ruimtelik-uitgebreide figuur soos ’n lyn in ’n Euklidiese ruimte wat een-dimensioneel is, is as ’n geheel en gevolglik in AL sy dele opeens teenwoordig. Strauss (1986: 57) verklaar:

> To ‘constitute’ the continuity of a line as a whole, the different parts, must be present at once (and not in succession,). In other words, if the spatial order of simultaneity is primitive and irreducible to the numerical order of succession, then the spatial whole-part relation itself would resist a perfect arithmetization.

Die ou definisie van ’n lyn as die kortste afstand tussen twee punte, is later deur Russell ‘gekorrigeer’ na die bewoording dat ’n lyn bloot die afstand is tussen twee punte. Strauss (1986: 60) verklaar hierdie omskrywing as inkonsistent wanneer die korrekte basis as onderskeiding tussen ruimtelike uitgebreidheid in oorspronklike sin (nou een-dimensionale uitgebreidheid) en die getalsanalogie aan die feitlike sy van die ruimtelike aspek, naamlik grootte (nou eintlik lengte en afstand) geneem word. Strauss (1986: 60) onderskei dit soos volg:

> The measure of the factual (one dimensional) extension of a straight line is given by the numerical analogy called distance. The distance of a line presupposes, its spatial extension and can therefore not be identical with it.

Dit was ook dan Hilbert wat heeltemal te verstane, die idee van ’n lyn as ’n ongedefinieerde term ingevoer het – reeds in 1899 (vgl. Strauss 1986: 60).

Uit bogenoemde is die sentrale en kwalifiserende aard van die sinkern van ’n bepaalde aspek duidelik. Aan die een kant word die sinkern van ’n aspek dus ontbloot deur sy analogiese momente, wat die samehang met ander aspekte openbaar. Maar andersyds word die uniekheid van ’n sinkern bevestig deurdat al hierdie analogiese struktuurmomente steeds gekwalifiseer word deur die sinkern van die betrokke aspek. Uit bogenoemde deel blyk dit dat die ‘oneindige verdere verdeelbaarheid van kontinuïteit’ die element van die ruimte is wat die meeste gebruik word. Enige modale feitlik-uitgebreide ruimtelike figuur (een, twee of drie dimensies) vertoon hierdie voor hande oneindige verdeelbaarheid. So word aan die feitlike sy van die ruimte-aspek analogies die primitiewe sin van oneindigheid aan die wetsy van die getalsaspek gereflekteer. Dit is oneindigheid in die sin van eindeloosheid, dus die Onvoltooid-oneindige of die Potensieel-oneindige, ook genoem Suksessief-oneindige (SO) (Strauss, 1986: 60).

4. Samevatting

Die gesprek oor die eie-aard van wiskunde is ’n kontinue een. Verskillende filosofiese denkraamwerke lei tot verskillende interpretasies hiervan. Die Reformatoriese denkraamwerk van skepping, sondeval en verlossing het uitdrukking gegee aan die twee belangrike rigtingbepalende regulatiewe idees, nl. soewereiniteit in eie kring en universaliteit in eie kring. Tesame met die ondersoekende fenomenologiese ingesteldheid om die essensiële elemente van getal en ruimte in hul uniekheid en samehang te ontleed, word uitgekom by ’n kosmologiese perspektief op wat wiskunde is. Die gehoorsaamheid aan die onverbreeklike samehang tussen wet en feit in die werklikheid lei tot ’n bepaalde beskouing oor die sin van getal en ruimte ,wat verryk word deur die talle momente in die analogiese verskyninge hiervan in ander werklikheidsaspekte. Hierdie analitiese omgang met die aspekte van getal en ruimte is fundamenteel tot die identifisering van die elementêre grondbegrippe in die wiskunde. Die identifisering en ontleding van hierdie grond- en ander soorte begrippe kan die debat oor die eie-aard van wiskunde ophelder en na verdere hoogtes neem. Die denkspore van DFM Strauss is hier as uitgangspunt geneem, en daar is gepoog om hom ’n ent hierin te volg. Ek maak glad nie daarop aanspraak dat my weergawe van sy onderskeidinge en insigte glashelder en korrek is nie. Tog was dit ’n besondere voorreg om hom op die pad te volg en af en toe saam met hom by perspektiwiese hoogtepunte en onderskeidinge stil te staan.

Bibliografie

BARTLE, R.G. 1976. *The elements of real analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.

BELL, E.T. 1937. *Men of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, Inc.

BELL, E.T. 1966. *Mathematics: Queen and Servant of Science.* London: G Bell & Sons Ltd.

BENDICK, J. & LEVIN, M. 1973. *Mathematics illustrated dictionary.* London: Kaye & Ward Ltd.

DANTZIG, T. 1947. *Number and the language of science.* London.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. 1980. *The mathematical experience.* Boston: Birkhauser.

DOOYEWEERD, H. 1969. *A New Critique of Theoretical Thought Vol. 1*. Transated by Freeman, D.H. & Young, W.S. USA: The Presbyterian and Reformed Publishing Company.

FRAENKEL, AA; BAR-HILLEL, Y; LEVY, A & VAN DALEN, D. 1973. *Foundations of Set Theory.* 2nd print. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

KLINE, M. 1980. *Mathematics: The loss of certainty.* New York: Oxford University Press.

POPMA, K.J. 1965. *Nadenken over de tijd.* Amsterdam: Buijten en Schipperheijn.

RUSSELL, B. 1937. *The principles of Mathematics.* London: George Allen & Unwin Ltd.

RUSSELL, B. 1956. *Principles of mathematics.* London: George Allen & Unwin Ltd.

SCHOEMAN, P.G. 1983. *Wysgerige Pedagogiek.* Pretoria: Sacum.

STAFLEU, M.D. 1980. *Time and again: A Systematic Analysis of the Foundations of Physics*. Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, D.F.M. s.a. Ongepubliseerde Wysbegeerte Diktaat, WYS III. Bloemfontein: UOVS.

STRAUSS, D.F.M. 1969. *Wysbegeerte en Vakwetenskap.* Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, D.F.M. 1978. *Inleiding tot die kosmologie.* Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, D.F.M. 1986. The philosophy of the infinite. Unfinished manuscript. Bloemfontein.

STRAUSS, D.F.M. 1988a. Die grondbegrippe van die sosiologie as vakwetenskap. RGN-ondersoek na navorsingsmetodologie, Navorsingsverslaereeks 8. Pretoria: RGN.

STRAUSS, D.F.M. 1988b. Enkele grondprobleme van en denkrigtings in die wiskunde. Teks van voordrag in Pretoria voor die VCHO. Oktober, 13.

VAN DEN BERG, J.H.1977. *Gedane zake: Twee omwentelingen in de Westerse Geestesgeschiedenis (Metabletica van de materie, deel II).* Nijkerk: GF Callenbach, BV.

VOLMINK, J.D. 1983. Meaning in mathematics: an integrating thinking, feeling and acting in a first-year calculus course. Ongepubliseerde M.Sc.-verhandeling. Cornell Universiteit, VSA.

WESSELS, D.C.J. 1982. Die deurwerking van die aritmetisisme in die wiskunde-onderrig op skool en die opvoedkundige implikasies daarvan. Ongepubliseerde M.Ed.-verhandeling. Bloemfontein: UOVS.

WESSELS, D.C.J. 1989. ’n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool. Ongepubliseerde D.Ed. proefskrif. Pretoria: Unisa.

WESSELS, D.C.J. 1993. Die rol van analogieë en metafore as onderrigstrategieë in die onderwys van wiskunde. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 29(1): 1-14.